Dimensi Metrik Sisi pada Beberapa Graf *Unicyclic*

Bayu Aprilianto[2], Dafik[1,2], Ermita Rizki Albirri[1,2]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Departement of Mathematics Education - University of Jember
apriliantobayu97@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, ermitara@unej.ac.id

Abstract

All the graphs in this paper are connected graphs and $d(e, v)$ is the length of the shortest path between $e = uv$ and v. Let $G = (V, E)$ where $V(G)$ is a set of vertex from graph G while $E(G)$ is a set of edge from graph G. The edge metric dimension is a topic that is closely related to the cardinality of the distance of each edge on the graph G with respect to the resolving set W which is denoted by $dim_E(G)$. Let if the subset of vertex $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, then the representation of the distance of the uv edge to the resolving set is k-tuple $r(uv|W) = (d(uv, w_1), d(uv, w_2), d(uv, w_3), ..., d(uv, w_k)$. A unicyclic graph is one that only has exactly one cycle. In this paper, we will study edge metric dimensions on some families of unicyclic graphs.

Keywords : Edge metric dimension, resolving set, unicyclic graphs.
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dari himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan titik yang berhingga dan tak kosong, sedangkan E adalah himpunan sisi yang berhingga dan boleh kosong dari pasangan tak terurut antara dua titik u dan v. Secara matematis himpunan V suatu graf G dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, sedangkan himpunan E suatu graf G dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$. Sehingga, suatu graf dimungkinkan tidak memiliki sisi namun setidaknya harus memiliki satu titik [1]. Secara matematis graf G dinotasikan dengan $G(V, E)$, dimana elemen dari V disebut titik dari graf G sedangkan elemen dari E disebut dengan sisi dari graf G [2]. Selain itu ada istilah jarak dalam teori graf, di mana jarak adalah lintasan terpendek dari sembarang titik u ke titik v pada graph G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ [3].

Graf *unicyclic* adalah graf terhubung yang hanya memiliki tepat satu siklus dan memiliki n titik serta m sisi, di mana jumlah titik dan jumlah sisi pada graf tersebut sama [4]. Graf siklus merupakan graf lintasan berorde n dengan adanya sisi yang menghubungkan titik ke n dengan titik awal pada graf tersebut, sehingga setiap titik pada graf tersebut memiliki derajat yang sama yaitu dua, biasanya graf siklus disebut juga dengan graf lingkaran. Jadi graf G yang hanya memiliki tepat satu siklus disebut graf *unicyclic*.

Topik dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari topik dimensi metrik yang diperkenalkan secara independen oleh Slater pada tahun 1975 [5], kemudian oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [6]. Dimensi metrik sisi adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda W pada graf G yang dinotasikan dengan $dim_E(G)$ [7]. Misalkan, jika $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ adalah himpunan terurut dari elemen titik yang merupakan titik pembeda pada graf G maka representasi sisi uv terhadap himpunan pembeda W adalah *k-tuple* $r(uv|W) = (d(uv, w_1), d(uv, w_2), d(uv, w_3), ..., d(uv, w_k))$. W adalah basis metrik

Bayu Aprilianto, Dimensi Metrik Sisi pada Beberapa Graf *Unicyclic*, CGANT JMA Vol. 1, No. 2, 2020, pp 58-64. DOI: 10.25037/cgantjma.v1i2.45 **Received:** 08 03 2020; **Revised:** 10 08 2020; **Accepted:** 11 17 2020; **Published:** 12 28 2020

sisi dari graf G apabila representasi setiap sisi terhadap himpunan pembeda W pada graf G berbeda dan kardinalitas dari himpunan pembeda W tersebut minimum [8].

Penelitian terkait topik dimensi metrik sisi ini telah dilakukan oleh Kelenc dkk., yang menemukan dimensi metrik sisi pada graf $W_{1,n}$ dan graf $F_{1,n}$ [8]. Kemudian ada Adawiyah dkk., yang menemukan dimensi metrik sisi pada graf *Star* (S_n), graf $B_{n,m}$, graf $B2_{n,m}$, dan graf Bt_n [7]. Selain itu, ada Nasir dkk., yang menemukan dimensi metrik sisi pada graf *Sun* (S_n), graf $G_{n,k}$, dan graf D_n [9].

Dalam makalah ini, kita akan menggunakan lemma berikut untuk menghitung dimensi metrik sisi dari suatu graf:

Lemma 1. *[8] $dim_E(G) = 1$ jika dan hanya jika graf G merupakan graf lintasan.*

Hasil Penelitian

Lemma 2. *Misalkan G merupakan graf terhubung. Jika tidak ada himpunan pembeda sisi dari G dengan kardinalitas k, maka sembarang himpunan $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| < k$, juga bukan merupakan himpunan pembeda sisi.*

Bukti. Misalkan G merupakan graf terhubung. Asumsikan tidak ada himpunan pembeda sisi dari G dengan kardinalitas k dan ada himpunan pembeda sisi $T \subseteq V(G)$ dengan $|T| < k$, sehingga untuk setiap $uv, vw \in E(G)$ memiliki $r(uv|T) \neq r(vw|T)$ dan T adalah himpunan pembeda sisi pada G. Selain itu, ada subset $U \subseteq V(G) \backslash T$ sedemikian sehingga $|T \cup U| = k$. Karena T adalah himpunan pembeda sisi dari G, maka $T \cup U$ adalah himpunan pembeda sisi dari G yang merupakan kontradiksi. □

Teorema 1. *Jika $m, n \geq 3$, maka dimensi metrik sisi pada graf cricket $Cr_{m,n}$ adalah 3.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa batas atas dimensi metrik sisi dari graf *cricket* $Cr_{m,n}$ adalah $dim_E(Cr_{m,n}) \leq 3$. Pilih $W = \{x_1, y_1, y_n\}$, sedemikian sehingga representasi setiap sisi pada graf *cricket* $Cr_{m,n}$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 1.
Berdasarkan Tabel 1, dapat dilihat bahwa semua representasi sisi pada graf *cricket* $Cr_{m,n}$ terhadap W sudah berbeda, jadi W adalah himpunan pembeda sisi dari graf *cricket* $Cr_{m,n}$, namun W belum tentu merupakan basis metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibuktikan batas bawah $dim_E(Cr_{m,n}) \geq 3$. Asumsikan bahwa $dim_E(Cr_{m,n}) < 3$, ambil $|W| = 2$ sedemikian sehingga terdapat dua titik sebagai titik pembeda yang merupakan elemen himpunan pembeda sisi pada graf *cricket* $Cr_{m,n}$. Terdapat 6 kasus yang dimungkinkan pada letak titik pembeda, yaitu:

Kasus 1. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran. Jika $x_k, x_l \in W$ dengan $1 \leq k, l \leq m$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(y_1y_2, x_k) = d(y_2y_3, x_k)$ dan $d(y_1y_2, x_l) = d(y_2y_3, x_l)$ sehingga $r(y_1y_2|W) = r(y_2y_3|W)$.

Kasus 2. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran dan graf lintasan. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $r = 1$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(x_my_2, x_k) = d(y_2y_3, x_k)$ dan $d(x_my_2, y_r) = d(y_2y_3, y_r)$ sehingga $r(x_my_2) = r(y_2y_3|W)$.

Kasus 3. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran dan graf lintasan. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} + 1 \rfloor \leq k \leq m$ dan $r = 1$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(y_2x_1, x_k) = d(y_2y_3, x_k)$ dan $d(y_2x_1, y_r) = d(y_2y_3, y_r)$ sehingga $r(y_2x_1|W) = r(y_2y_3|W)$.

Table 1: Representasi graf *cricket* $Cr_{m,n}$.

e	$r(e\|W)$	Kondisi
$x_i x_{i+1}$	$(i-1, i+1, n+i-2)$	$1 \leq i < \lceil \frac{m}{2} \rceil$
	$(i-1, i, n+m-i-2)$	$i = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ dan m ganjil
	$(i-1, i+1, n+m-i-2)$	$i = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ dan m genap
	$(m-i+1, m-i+1, n+m-i-2)$	$\lceil \frac{m}{2} \rceil < i \leq m-1$
$x_m y_2$	$(1, 1, n-2)$	$m \geq 3$
$y_2 x_1$	$(0, 1, n-2)$	$n \geq 3$
$y_j y_{j+1}$	$(1, 0, n-2)$	$j = 1$
	$(j-1, j-1, n-j-1)$	$2 \leq j \leq n-1$

Kasus 4. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran dan graf lintasan. Jika $x_k, y_r \in W$, dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $2 \leq r \leq n$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(x_m y_2, x_k) = d(y_1 y_2, x_k)$ dan $d(x_m y_2, y_r) = d(y_1 y_2, y_r)$ sehingga $r(x_m y_2|W) = r(y_1 y_2|W)$.

Kasus 5. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran dan graf lintasan. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} + 1 \rfloor \leq k \leq m$ dan $2 \leq r \leq n$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(y_2 x_1, x_k) = d(y_1 y_2, x_k)$ dan $d(y_2 x_1, y_r) = d(y_1 y_2, y_r)$ sehingga $r(y_2 x_1|W) = r(y_1 y_2|W)$.

Kasus 6. Ambil sembarang titik pada graf lintasan. Jika $y_r, y_s \in W$ dengan $1 \leq r, s \leq n$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama yaitu $d(y_2 x_1, y_r) = d(x_m y_2, y_r)$ dan $d(y_2 x_1, y_s) = d(x_m y_2, y_s)$ sehingga $r(y_2 x_1|W) = r(x_m y_2|W)$.

Berdasarkan kasus 1 sampai 6 telah dibuktikan bahwa W bukan himpunan pembeda sisi karena terdapat dua titik yang memiliki repesentasi sisi yang sama. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2 diperoleh $dim_E(Cr_{m,n}) \geq 3$. Sehingga $dim_E(Cr_{m,n}) = 3$. □

Teorema 2. *Jika* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 2$*, maka dimensi metrik sisi pada graf tadpole* $T_{m,n}$ *adalah* 2.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa batas atas dimensi metrik sisi dari graf *tadpole* $T_{m,n}$ adalah $dim_E(T_{m,n}) \leq 2$. Pilih $W = \{x_m, y_n\}$, sedemikian sehingga representasi setiap sisi pada graf $T_{m,n}$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 2.

Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa semua representasi sisi pada graf *tadpole* $T_{m,n}$ terhadap W sudah berbeda, jadi W adalah himpunan pembeda sisi dari graf *tadpole* $T_{m,n}$, namun W belum tentu merupakan basis metrik sisi.

Table 2: Representasi graf *tadpole* $T_{m,n}$.

e	$r(e\|W)$	Kondisi
$x_i x_{i+1}$	$(i, n+i-1)$	$1 \leq i < \lceil \frac{m}{2} \rceil$
	$(i-1, n+i-1)$	$i = \frac{m}{2}$ dan m genap
	$(m-i-1, n+m-i)$	$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < i \leq m-1$
$x_m x_1$	$(0, n)$	$m \geq 3$
$x_1 y_1$	$(1, n-1)$	$n \geq 2$
$y_j y_{j+1}$	$(j+1, n-j-1)$	$1 \leq j \leq n-1$

Langkah selanjutnya akan dibuktikan batas bawah $dim_E(T_{m,n}) \geq 2$. Asumsikan bahwa $dim_E(T_{m,n}) < 2$, ambil $|W| = 1$ sedemikian sehingga terdapat satu titik sebagai titik pembeda yang merupakan elemen himpunan pembeda sisi pada graf *tadpole* $T_{m,n}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $dim_E(T_{m,n}) \geq 2$. Sehingga $dim_E(T_{m,n}) = 2$. □

Corollary 1. *Jika* $m \geq 3$*, maka dimensi metrik sisi pada graf pan* $T_{m,1}$ *adalah* 2.

Teorema 3. *Jika* $m \geq 2$*, maka dimensi metrik sisi pada graf net* $N_{3,m}$ *adalah* 2.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa batas atas dimensi metrik sisi dari graf *net* $N_{3,m}$ adalah $dim_E(N_{3,m}) \leq 2$. Pilih $W = \{x_{1,1}, x_{3,m}\}$, sedemikian sehingga representasi setiap sisi pada graf *net* $N_{3,m}$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 3.

Berdasarkan Tabel 3, dapat dilihat bahwa semua representasi sisi pada graf *net* $N_{3,m}$ terhadap W sudah berbeda, jadi W adalah himpunan pembeda sisi dari graf *net* $N_{3,m}$, namun W belum tentu merupakan basis metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibuktikan batas bawah $dim_E(N_{3,m}) \geq 2$. Asumsikan bahwa $dim_E(N_{3,m}) < 2$, ambil $|W| = 1$ sedemikian sehingga terdapat satu titik sebagai titik pembeda yang merupakan elemen himpunan pembeda sisi pada graf *net* $N_{3,m}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $dim_E(N_{3,m}) \geq 2$. Sehingga $dim_E(N_{3,m}) = 2$. □

Teorema 4. *Jika* $m \geq 2$*, maka dimensi metrik sisi pada graf bull* $B_{3,m}$ *adalah* 2.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa batas atas dimensi metrik sisi dari graf *bull* $B_{3,m}$ adalah $dim_E(B_{3,m}) \leq 2$. Pilih $W = \{x_1, x_{3,m}\}$, sedemikian sehingga representasi setiap sisi pada graf *bull* $B_{3,m}$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 4.

Table 3: Representasi graf *net* $N_{3,m}$.

e	$r(e\|W)$	Kondisi
x_ix_{i+1}	$(i, m+2-i)$	$1 \leq i \leq 2$
x_3x_1	$(1, m)$	$m \geq 2$
$x_ix_{i,1}$	$(2i-2, m+1)$	$1 \leq i \leq 2$
	$(2, m-1)$	$i = 3$
$x_{i,j}x_{i,j+1}$	$(j-i, m+j+1)$	$i = 1$ dan $1 \leq j \leq m-1$
	$(j+i, m+j+1)$	$i = 2$ dan $1 \leq j \leq m-1$
	$(j+i-1, m-j-1)$	$i = 3$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Table 4: Representasi graf *bull* $B_{3,m}$.

e	$r(e\|W)$	Kondisi
x_ix_{i+1}	$(i-1, m+2-i)$	$1 \leq i \leq 2$
x_3x_1	$(0, m)$	$m \geq 2$
$x_ix_{i,1}$	$(1, m-2i+5)$	$2 \leq i \leq 3$
$x_{i,j}x_{i,j+1}$	$(j+1, m+j+1)$	$i = 2$ dan $1 \leq j \leq m-1$
	$(j+1, m-j-1)$	$i = 3$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Berdasarkan Tabel 4, dapat dilihat bahwa semua representasi sisi pada graf *bull* $B_{3,m}$ terhadap W sudah berbeda, jadi W adalah himpunan pembeda sisi dari graf *bull* $B_{3,m}$, namun W belum tentu merupakan basis metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibuktikan batas bawah $dim_E(B_{3,m}) \geq 2$. Asumsikan bahwa $dim_E(B_{3,m}) < 2$, ambil $|W| = 1$ sedemikian sehingga terdapat satu titik sebagai titik pembeda yang merupakan elemen himpunan pembeda sisi pada graf *bull* $B_{3,m}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $dim_E(B_{3,m}) \geq 2$. Sehingga $dim_E(B_{3,m}) = 2$. $\square$

Teorema 5. *Jika $m, n \geq 3$, maka dimensi metrik sisi pada graf peach C_n^m adalah $n+1$.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa batas atas dimensi metrik sisi dari graf *peach* C_n^m adalah $dim_E(C_n^m) \leq n+1$. Pilih $W = \{x_1, y_1, y_1, y_3, ..., y_n\}$, sedemikian sehingga representasi setiap sisi pada graf *peach* C_n^m terhadap W dapat dilihat pada Tabel 5.

Table 5: Representasi graf *peach* C_n^m.

e	$r(e\|W)$	Kondisi
x_ix_{i+1}	$(i, \underbrace{i, \cdots, i}_{n})$	$1 \leq i < \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$
	$(i-1, \underbrace{i, \cdots, i}_{n})$	$i = \frac{m}{2}$ dan m genap
x_ix_{i+1}	$(m-i-1, \underbrace{m+1-i, \cdots, m+1-i}_{n})$	$\left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil \leq i \leq m-1$
x_mx_1	$(0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n})$	$m \geq 3$
x_1y_j	$(\underbrace{1, \cdots, 1}_{j}, 0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-j})$	$1 \leq j \leq n$

Berdasarkan Tabel 5, dapat dilihat bahwa semua representasi sisi pada graf *peach* C_n^m terhadap W sudah berbeda, jadi W adalah himpunan pembeda sisi dari graf *peach* C_n^m, namun W belum tentu merupakan basis metrik sisi.

Langkah selanjutnya akan dibuktikan batas bawah $dim_E(C_n^m) \geq n+1$. Asumsikan bahwa $dim_E(C_n^m) \leq n+1$, ambil $|W| = n$ sedemikian sehingga terdapat n titik sebagai titik pembeda yang merupakan elemen himpunan pembeda sisi pada graf *peach* C_n^m. Terdapat 3 kasus yang dimungkinkan pada letak titik pembeda, yaitu:

Kasus 1. Ambil sembarang titik pada graf lingkaran sebanyak n. Jika $x_k \in W$ dengan $1 \leq k \leq m$, maka sisi e pada *pendant* akan memiliki jarak yang sama antara satu dengan yang lain terhadap titik pembeda pada G sehingga $r(x_1y_1|W) = r(x_1y_2|W) = r(x_1y_3|W)$ $= r(...|W) = r(x_1y_n|W)$.

Kasus 2. Ambil sembarang satu titik pada graf lingkaran dan sebanyak $n-1$ titik pada *pendant*. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ dan $1 \leq r \leq n-1$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama terhadap titik pembeda pada G sehingga $r(x_mx_1|W) = r(x_1y_n|W)$.

Kasus 3. Ambil sembarang satu titik pada graf lingkaran dan sebanyak $n-1$ titik pada *pendant*. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $\left\lfloor \frac{m}{2} + 1 \right\rfloor \leq k \leq m$ dan $1 \leq r \leq n-1$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama terhadap *resolving set* pada G sehingga $r(x_1x_2|W) = r(x_1y_n|W)$.

Kasus 4. Ambil sembarang titik sebanyak ≥ 2 pada graf lingkaran dan sebanyak $\leq n-2$ pada *pendant*. Jika $x_k, y_r \in W$ dengan $1 \leq k \leq m$ dan $1 \leq r \leq n-2$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama terhadap titik pembeda pada G sehingga $r(x_1y_{n-1}|W) = r(x_1y_n|W)$.

Kasus 5. Ambil sembarang titik pada *pendant* sebanyak n. Jika $y_r \in W$ dengan $1 \leq r \leq n$, maka akan ditemukan setidaknya 2 jarak yang sama terhadap titik pembeda pada G sehingga $r(x_mx_1|W) = r(x_1x_2|W)$.

Berdasarkan kasus 1 sampai 5 telah dibuktikan bahwa $|W| < n + 1$ bukan himpunan pembeda sisi karena setidaknya akan ada 2 repesentasi sisi yang sama sehingga pernyataan tersebut kontradiksi. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2 diperoleh $dim_E(C_n^m) \geq n+1$. Sehingga $dim_E(C_n^m) = n + 1$. □

Kesimpulan

Penelitian ini telah menemukan dimensi metrik sisi dari beberapa keluarga graf *unicyclic* diantaranya yaitu graf *cricket* $Cr_{m,n}$, graf *tadpole* $T_{m,n}$, graf *net* $N_{3,m}$, graf *bull* $B_{3,m}$, graf *pan* $T_{m,1}$, dan graf *peach* C_n^m. Berdasarkan hasil penelitian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik sisi dari beberapa graf *unicyclic* ditemukan satu lemma, lima teorema, dan satu akibat dari teorema sebelumnya (*corollary*).

Masalah terbuka 1 *Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik sisi pada keluarga graf unicyclic, maka peneliti memberikan open problem kepada pembaca agar dapat menerapkan topik dimensi metrik sisi pada graf lainnya menggunakan operasi yang ada pada teori graf.*

References

[1] Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

[2] Hartsfield, N. and Ringel. 1994. *Pearls In Graph Theory*. Australia: Academic Press.

[3] Harary. 1994. *WolframMathWorld*. Wolfram Research

[4] Rongbo, Z. Y. ZhangRongbo, Z. Y. Zhang, B. Liu, and C. Liu. 2010. *Information Computing and Applications*. China: Springer.

[5] Slater, P. J. 1975. Leaves of Trees. *Congressus Numerantium* **14** 549-559.

[6] Harary, F., and R. A. Melter. 1976. On The Metric Dimension of A Graph. *Ars Combinatorica* **2** 191-195.

[7] Adawiyah R, Dafik, R. Alfarisi, R. M. Prihandini and I. H. Agustin. 2018. Edge Metric Dimension on Some Families of Tree. *IOP Conf. Series: Journal of Physics* **1180** 012005.

[8] Kelenc A, Trantik N, and Yero I G. 2018. Uniquely Identifying the Edge of A Graph: the edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics* **251**:204-220.

[9] Nasir R, Zafar S, and Zahid Z. 2018. Edge Metric Dimension of Graph. *ARS Combinatoria* **147**:143-156.